

Evaluation der Normalverteilungsannahme

P. Wilhelm; HS 2016

1. Überprüfung der Normalverteilungsannahme im SPSS

SPSS bietet verschiedene Möglichkeiten, um Verteilungsannahmen zu überprüfen. Angefordert werden können deskriptive Kennwerte, Grafiken und auch spezifische Signifikanztests, um zu testen, ob die vorliegende empirische Verteilung von der Normalverteilung abweicht.

Über den Explore-Befehl können die wesentlichen Information abgerufen werden. (Befehlssequenz: ANALYSIEREN -> DESKRIPTIVE STATISTIKEN -> EXPLORATIVE DATENANALYSE (ANALYZE -> DESCRIPTIVE STATISTICS -> EXPLORE)).

Folgendes Menü wird dann angezeigt.

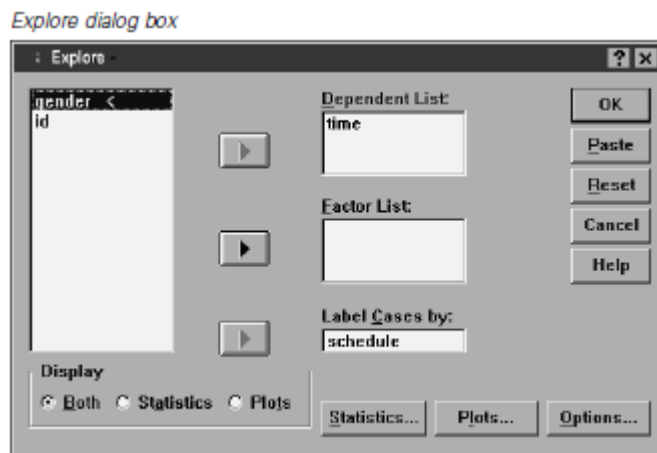


Abbildung 1: SPSS-Menü: Explorative Datenanalyse

Mit dem „**Statistics**“ Submenü können die wichtigsten deskriptiven Kennwerte angefordert werden.

Mit dem „**Options**“-Submenü wird festgelegt wie Missing behandelt werden sollen, wenn mehrere Variablen betrachtet werden: (Ausschluss „listwise“ (Liegt in einer der Variablen Missing vor, wird ganzer Fall ausgeschlossen) oder „pairwise“ (alle gültigen Fälle werden einbezogen)).

Mit dem „**Plots**“ Sub-Menü können verschiedene Grafische Darstellungen angefordert werden: Boxplots, Stem-and-leaf Darstellungen, Histogramme und Normality Plots mit Tests.

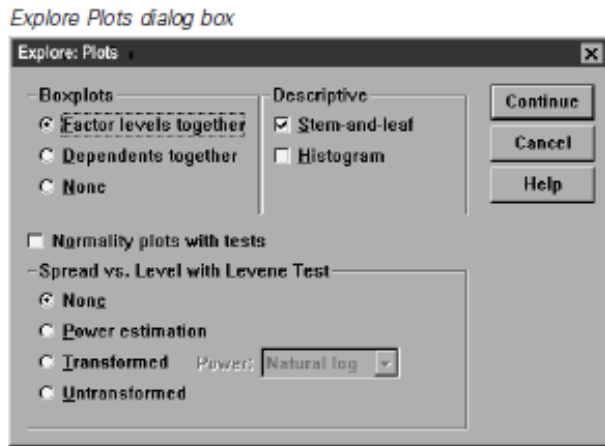


Abbildung 2: SPSS-Menü: Explorative Datenanalysen, Submenü Diagramme

Kreuzt man die Option „Normality plots with levene tests“ an, werden QQ-Plots (siehe Abb. 5 und 6) und die Ergebnisse des Signifikanztests zur Überprüfung der Normalverteilungsannahme angezeigt: der Kolmogorov-Smirnov Test (korrigiert nach Lilliefors) und der Shapiro-Wilk Test.

2. Interpretation der statistischen Tests zur Überprüfung der Abweichung von der Normalverteilung

Der Kolmogorov Smirnov Test und der Shapiro-Wilk-Test sind Omnibus-Tests, die prüfen, ob die empirische Verteilung signifikant von der Normalverteilung abweicht. Sie beschreiben nicht, in welcher Form die Abweichung auftritt, z. B. ob die Verteilung breit oder spitzgipflig ist (Kurtosis), ob sie links- oder rechtsschief ist (Skewness) oder ggf. beides. Der Shapiro Wilk Test hat eine grössere Power als der Kolmogorov Smirnov mit Signifikanzkorrektur nach Lillefors und sollte deshalb für die Interpretation herangezogen werden. Bei kleineren Stichproben ($N < 30$) haben beide Tests zu wenig Power und sind nicht sehr zuverlässig (Razali & Wah, 2011).

Problematisch ist, dass beide Tests sehr sensibel auf Ausreißer reagieren. Insbesondere bei grösseren Stichproben können marginale Abweichungen von der theoretischen Normalverteilung bereits zu einem signifikanten Ergebnis führen, das eine Verletzung der Normalverteilungsannahme anzeigt.

Daraus folgt für die Beurteilung der Normalverteilungsannahme:

- ➔ Wenn der Shapiro Wilk Test – bei hinreichend grosser Stichprobe - nicht signifikant wird ($\alpha < .05$), kann davon ausgegangen werden, dass eine Normalverteilung vorliegt.

- ➔ Wenn der Shapiro Wilk Test signifikant wird, heisst das nicht zwangsläufig, dass die Normalverteilungsannahme gravierend verletzt ist. **Erforderlich ist dann eine differenziertere Beurteilung auf der Basis der grafischen Darstellung der Daten, sowie eine Begutachtung der Schiefe und des Exzesses.**
- ➔ Auch wenn die die Normalverteilungsannahme nicht verletzt ist, sollte die grafische Darstellung der Daten (z.B. Histogramm) inspiziert werden.

3. Beurteilung von Schiefe und Exzess

Schiefe (Skewness)

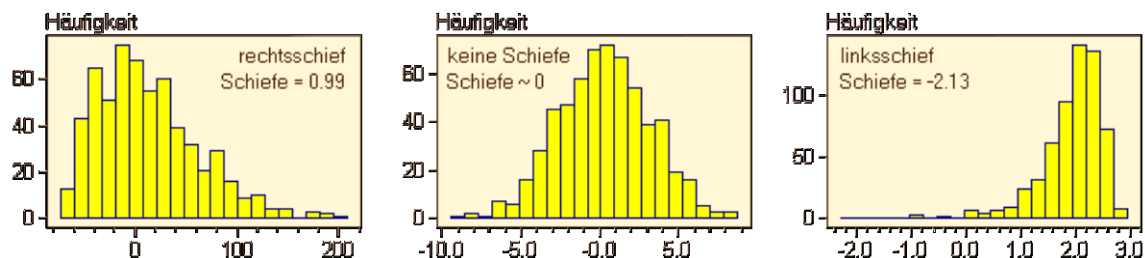
Die Schiefe ist ein Mass für die Symmetrie einer Verteilung

$$\text{Schiefe} = \frac{\sum_{m=1}^n (x_m - \bar{x})^3}{n * s_x^3} \quad (\text{Formel 1})$$

Schiefe > 0 (Mittelwert > Median): Verteilung ist rechtsschief bzw. linkssteil (linksgipflig)

Schiefe = 0 (Mittelwert = Median): Verteilung ist symmetrisch

Schiefe < 0 (Mittelwert < Median): Verteilung ist linksschief, bzw. rechtssteil (rechtsgipflig)



Ob die Abweichung von einer Symmetrischen Verteilung signifikant ist, kann mit einem **z-Test** überprüft werden:

$$z(\text{Skewness}) = (\text{Skewness} / \text{SE der Skewness})$$

Dieser z-Wert wird mit dem kritischen z-Wert verglichen. Tabachnick & Fidell (1995) empfehlen eine strenge Prüfung ($p < .01$ bzw. $p < .001$) bei mittelgrossen Stichproben.

$$p = .05: z\text{-krit} = 1.96; p = .01: z\text{-krit} = 2.58; p = .001: z\text{-krit} = 3.3$$

Exzess (Kurtosis):

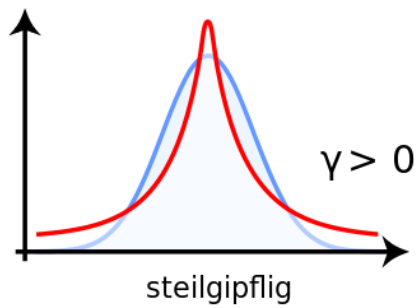
Der Exzess ist ein Mass für die Wölbung des Gipfels einer Verteilung

$$Ex = \frac{\sum_{m=1}^n (x_m - \bar{x})^4}{n * s_x^4} - 3 \quad (\text{Formel 2})$$

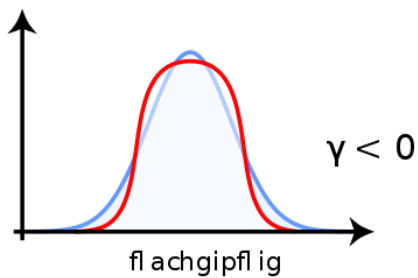
Der Exzess ist nur für unimodale Verteilungen sinnvoll interpretierbar

Exzess = 0: Verteilung ist symmetrisch

Exzess > 0: schmaler, spitzer Gipfel, breite Enden der Verteilung:



Exzess < 0: flacher, breiter Gipfel, schmale Enden der Verteilung:



Test auf signifikante Abweichung des Exzesses (Kurtosis):

$$z(\text{Kurtosis}) = \text{Kurtosis} / \text{SE der Kurtosis (Std. Error)}$$

Grafische Darstellungen der Daten

Aufschluss über die Verteilung von Variablen geben verschiedene grafische Darstellungen, die nachfolgend vorgestellt werden:

Histogramm

Beim Histogramm (Abb. 3) wird die Anzahl Fälle, die es zu den einzelnen Kategorien gibt, auf der Y-Achse angezeigt.

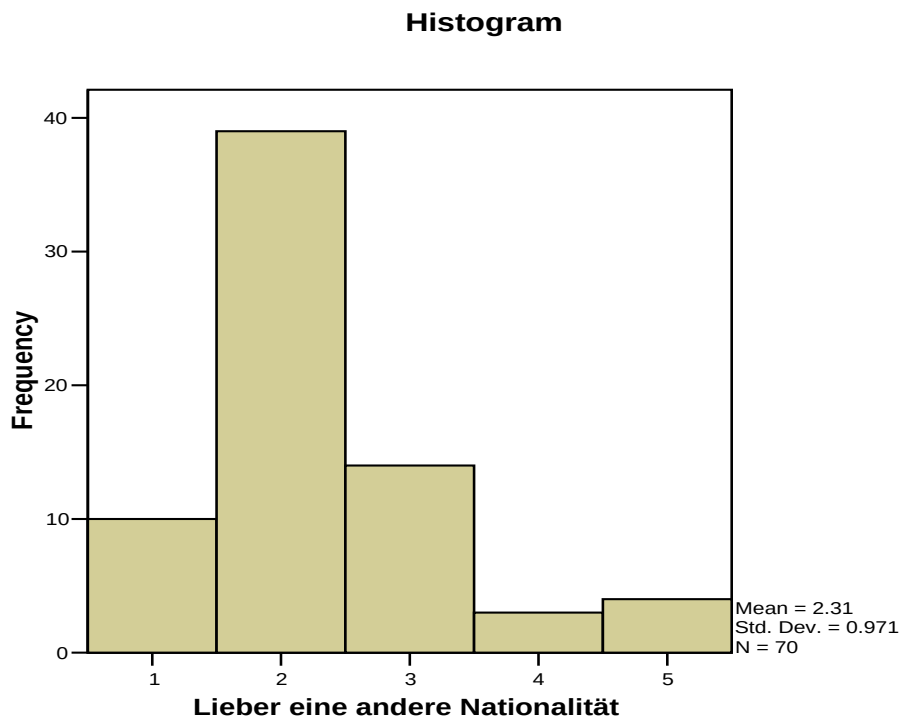


Abbildung 3: Histogramm

Boxblott

Darstellung des Medians (Mittellinie), des 25% Quartils (untere Begrenzung der Box, siehe Abb. 4) und 75% Quartils (obere Begrenzung der Box).

Die grössten bzw. kleinsten Werte werden durch die T-Linien angezeigt.

Ausreisser und Extremwerte werden - sofern vorhanden - gesondert ausgewiesen.

Ausreisser (Outlier). Datenpunkte, die 1,5 bis 3 Mal den Interquartilsrange (Abstand zwischen 25% und 75% Quartil) vom oberen oder unteren Ende der Box entfernt sind.

Extremwerte (Extreme values) werden mit * gekennzeichnet und sind mehr als 3 Interquartilsranges vom oberen oder unteren Ende der Box entfernt.

In der Beispielgraphik (Abb. 4) ist das 25% Quartil und der Median identisch und haben den Wert 2. 4 Fälle haben einen Wert von 5 der als Ausreisser angezeigt wird.

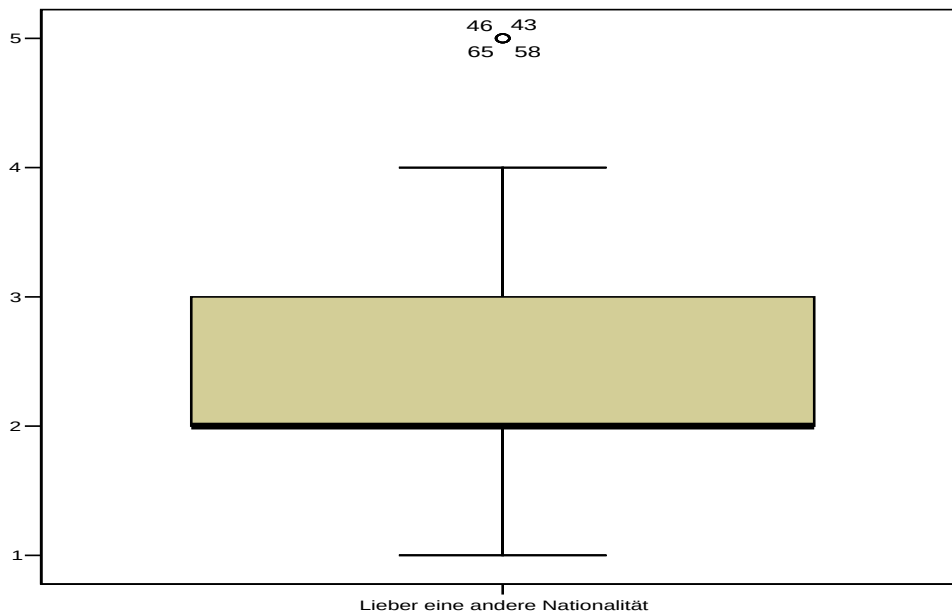


Abbildung 4: Boxplot

Normal Q-Q-Plot

Bei Vorliegen einer Normalverteilung liegen die Punkte nahe an der Geraden (Abb. 5). Im Beispiel weicht der Wert 5 deutlich von der Geraden ab. Bei Vorliegen einer Normalverteilung wären die empirischen Werte, die den gleichen Rangplatz in der Verteilung einnehmen würden, kleiner.

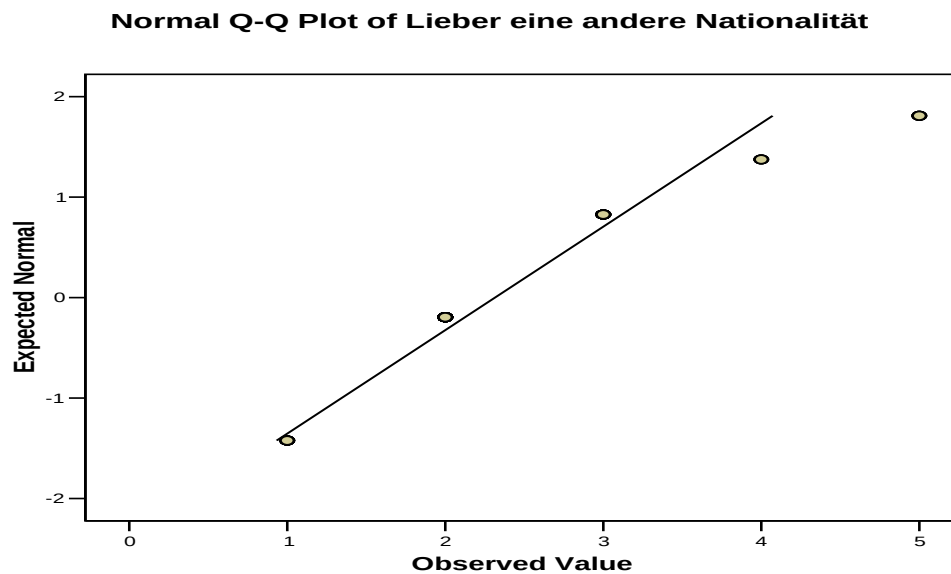


Abbildung 5: Q-Q Plot

Detrended Q-Q-Plot

Der Detrended Q-Q-Plot zeigt an, wie weit ein beobachteter Wert von der theoretischen Normalverteilung abweicht (Abb. 6).

$\text{Observed Value} - (\text{Deviation from Normal} * \text{SD}) \approx \text{Wert}$, wenn Normalverteilung mit gleichem Mittelwert und gleicher Streuung vorliegen würde.

In der Beispielgraphik ist der grösste beobachtete Wert 5 fast eine Standardabweichung zu gross (0.9 Deviation from Normal: $0.9 * 0.97 \text{ SD} = 0.87$). D.h. der entsprechende Wert würde bei Vorliegen der Normalverteilung 4.13 betragen ($5 - 0.87$).

Detrended Normal Q-Q Plot of Lieber eine andere Nationalität

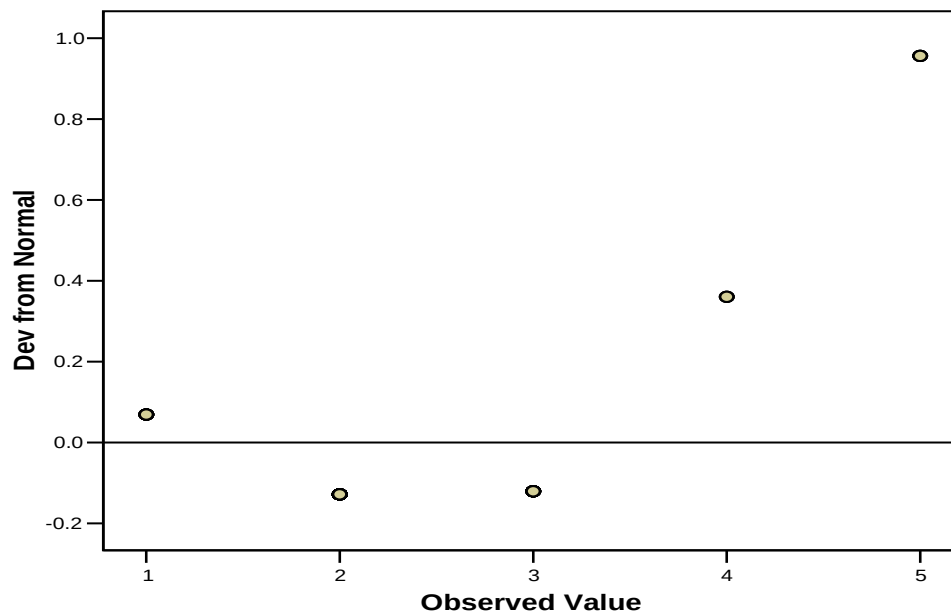
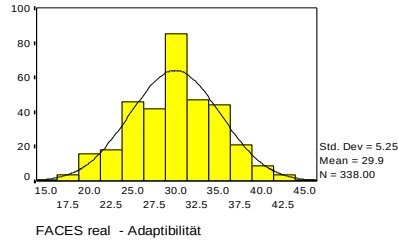


Abbildung 6: Detrended Q-Q Plot

Grafische Darstellung verschiedener Verteilungen

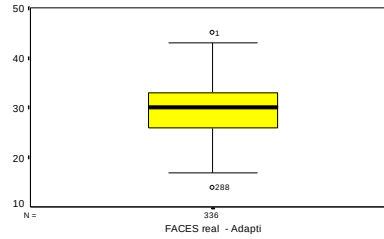
Histogramm

Normalverteilung

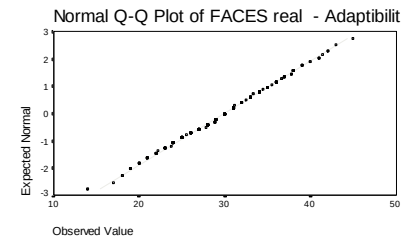


Boxplot

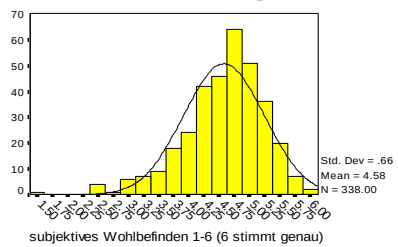
Shapiro Wilk Testp = .223



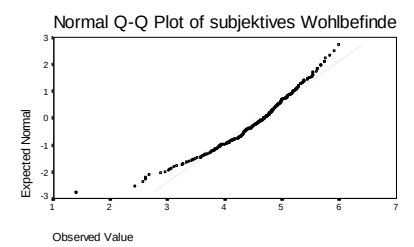
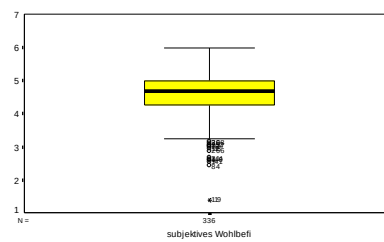
Normal Q-Q Plots



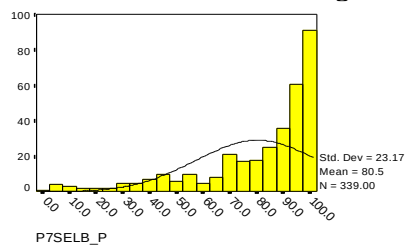
Linksschiefe Verteilung



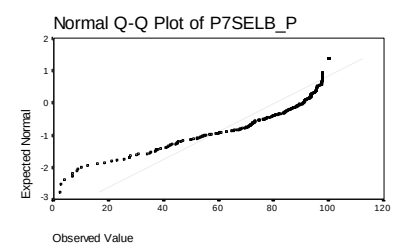
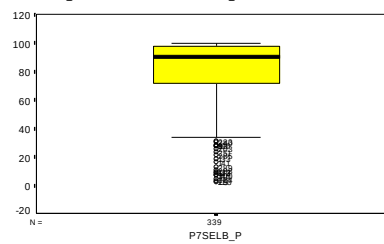
Shapiro Wilk Testp = .0010



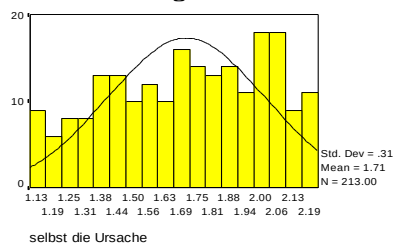
Extrem linksschiefe Verteilung



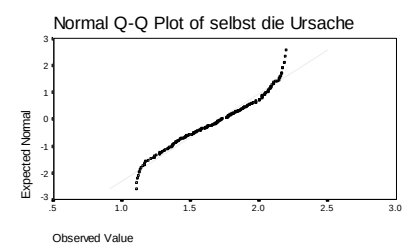
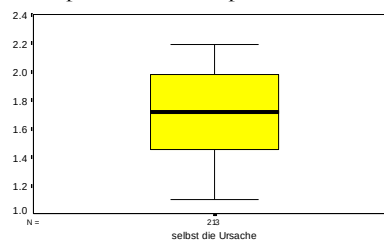
Shapiro Wilk Testp = .0000



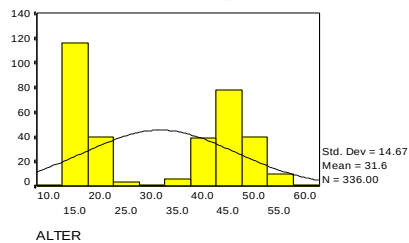
Gleichverteilung



Shapiro Wilk Testp = .0267



Bimodale Verteilung



Shapiro Wilk Testp = .0000

